ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

2001

ΘΕΜΑ 1ο

A_1: Θεωρία

A_2: $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Sigma$

B_1: $1 \to \zeta$, $2 \to \gamma$, $3 \to \alpha$, $4 \to \delta$, $5 \to \beta$

B_2: $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\lim\limits_{x \to 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha = f(3)$

και $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = -1$

Άρα $\alpha = -\frac{1}{9}$

β) Για $x > 3$ είναι $f'(x) = \frac{4e^{x-3} - xe^{x-3}}{(x-3)^2}$

Άρα $f'(4) = -1$ και $f(4) = 1 - e$

Επομένως (ε): $y = -x + 5 - e$

γ) Είναι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$

και συνεχής.

Άρα $E(\Omega) = \int_1^2 (-f(x))\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x)\left(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma\right) = 3x^2 - 4x + 6$ (1)

Αν υπάρχει x_0, θέση ακροτάτου, τότε, από Θ. Fermat, θα είναι $f'(x_0) = 0$, άτοπο, λόγω σχέσης (1)

β) Από την (1) πάλι προκύπτει ότι $f'(x) > 0$, αφού $\Delta_1 = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ και $\Delta_2 < 0$

γ) Είναι $f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow$

$f(0)\left(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma\right) = -1$,

με $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < \beta^2 - 3\gamma < 0$ (αφού $\gamma > 0$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } f(0) < 0 \\ \text{Ομοίως } f(1) > 0\end{array}\right\} \text{Στη συνέχεια Θ. Bolzano}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $xt = u$, οπότε $x\,dt = du$

Η αρχική σχέση γράφεται:

$$f(x) = 1 - 2\int_0^x u f^2(u)\,du$$

Η f είναι συνεχής, άρα το β΄ μέλος είναι παραγωγίσιμη, άρα η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -2x f^2(x)$$

β. Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

γ. $g(x) = c \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} - x^2 = c$

Από την αρχική σχέση προκύπτει $f(0) = 1$, άρα $c = 1$

Συνεπώς $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

δ. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x f(x)\, \eta\mu 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\cdot \eta\mu 2x\right)$$

Επειδή $0 \le \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \le \dfrac{|x|}{1+x^2}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{1+x^2} = 0$, θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) = 0$$

☆2002☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

B_1. Θεωρία

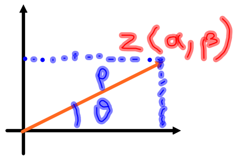
B_2. $\alpha \to \Sigma,\ \beta \to \Lambda,\ \gamma \to \Sigma,\ \delta \to \Sigma,\ \varepsilon \to \Sigma$

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f(3) = -iz,\ f(8) = z,$

$f(13) = iz,\ f(18) = -z$

β. Έχουμε:



$\rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] =$

$\rho(-\eta\mu\theta + i\eta\mu\theta) = i\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = iz$

γ. Έχουμε $z = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 1 + i\sqrt{3} = A(1, \sqrt{3})$

και $f(13) = iz = -\sqrt{3} + i = B(-\sqrt{3}, 1)$

Άρα $(OAB) = \frac{1}{2}|\vec{OA}|\,|\vec{OB}| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$

☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Έχουμε:

$g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Longleftrightarrow$

$(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$

β. Η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Longleftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$

Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$, οπότε

$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

Έτσι έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	Τ.Μ. (3)	$\searrow$	Τ.Ε. (−1)	$\nearrow$	$+\infty$

Από τον πίνακα έχουμε ότι η h έχει μία (αρνητική) ρίζα στο $(-\infty, -1)$ και μία (θετική) στο $(1, +\infty)$

Επειδή είναι $h(0)\cdot h(1) < 0$, έχει μία ακόμα θετική ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $h(x)>g(x) \Leftrightarrow h(x)-g(x)>0 \Longrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(h(x)-g(x))dx>0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx>0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

β. i) Είναι

$$f'(x)+f'(x)e^{-f(x)}=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$$

ii) Έχουμε $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x) \Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<f'(x)$$

$$\overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}<f'(\xi)<f'(x)\ ,\ \text{όπου } \xi\in(0,x)$$

$\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$, το οποίο ισχύει

αφού $f''(x)=\dfrac{f'(x)\,e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}>0$, άρα $f'\nearrow$.

iii) Έστω $\int_0^1 f(x)dx=E$ (Είναι $f(x)>f(0)=0$)

Άρα $\int_0^1 \frac{1}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx \Longrightarrow$

$$\frac{1}{4}<E<f(1)-E \Longrightarrow \frac{1}{2}<E<\frac{1}{2}f(1)$$

☆2003☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. α → Σ, β → Σ, γ → Σ, δ → Λ, ε → Λ

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $w = 3(\alpha+\beta i) - i(\alpha-\beta i)+4$
$= (3\alpha-\beta+4)+(3\beta-\alpha)i$

β. Έστω $w = x+yi$ Ισχύει $y=x-12$ (1)

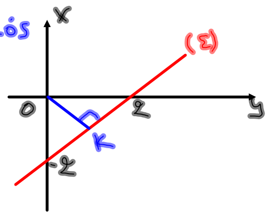
Έχουμε:

$w = 3z - iz + 4 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3\alpha-\beta+4 \\ y = 3\beta-\alpha \end{array}\right\}$ (2)

Η (1) λόγω των (2) γίνεται $\beta=\alpha-2$

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία (ε): $y = x-2$

γ. Ο ζητούμενος μιγαδικός είναι αυτός που έχει εικόνα το Κ.



Οι συντεταγμένες του προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$\left.\begin{array}{l} y = x-2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = (1,-1)$

Άρα $z = 1-i$

☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1>0$
και $f''(x) = 2x(10x^2+3)$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1, συνεπώς έχει αντίστροφη.

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	↗	σ.κ	↗

Επίσης τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και πάνω στο $[0,+\infty)$

Παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0,0)$

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι

$e^x \geq 1+x \Longleftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - x - 1$, η οποία έχει ελάχιστο το $(0,0)$. Άρα $h(x) \geq h(0) = 0$

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ είναι η $y=x$, η οποία είναι άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$

δ. Η f^{-1} είναι επίσης γν. αύξουσα, άρα για $x>0 \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(0)=0$

Άρα $E(\Omega)=\int_0^3 f^{-1}(x)\,dx =$

$= \int_0^1 u f'(u)\,du =$

$= \int_0^1 u(5u^4+3u^2+1)\,du = \frac{25}{12}$

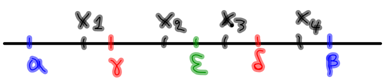
Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$
άρα
$dx=f'(u)du$
και
για $x=0 : u=0$
$x=3 : u=1$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Από την εφαρμογή του Θ. Bolzano στο $[\gamma,\delta]$, υπάρχει $\varepsilon \in (\gamma,\delta)$ τέτοιο, ώστε $f(\varepsilon)=0$.

β. Θέλουμε δύο σημεία ξ_1, ξ_2 για την f'', άρα τέσσερα σημεία για την f'. Εφαρμόζουμε λοιπόν τέσσερις φορές το Θ.Μ.Τ για την f, στα διαστήματα
$[\alpha,\gamma]$, $[\gamma,\varepsilon]$, $[\varepsilon,\delta]$ και $[\delta,\beta]$

Έχουμε



$f'(x_1)=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}$, $f'(x_2)=\frac{-f(\gamma)}{\varepsilon-\gamma}$, $f'(x_3)=\frac{f(\delta)}{\delta-\varepsilon}$

και $f'(x_4)=\frac{-f(\delta)}{\beta-\delta}$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θ.Μ.Τ. για την f' στα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_3,x_4]$

Είναι

$f''(\xi_1)=-f(\gamma)\left[\frac{(\gamma-\alpha)+(\varepsilon-\gamma)}{x_2-x_1}\right]$ και

$f''(\xi_2)=-f(\delta)\left[\frac{(\delta-\varepsilon)+(\beta-\delta)}{x_4-x_3}\right]$,

με τις αγκύλες να είναι θετικοί αριθμοί.

Άρα $f''(\xi_1)\,f''(\xi_2)=f(\gamma)\cdot f(\delta)[+][+]<0$

γ. Άρα από Θ. Bolzano στο $[\xi_1,\xi_2]$ για την f'', προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$

Επομένως το $(x_0, f(x_0))$ είναι <u>πιθανό</u> σημείο καμπής.

Δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι έχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής

☆2004☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. α → Σ, β → Σ, γ → Λ, δ → Σ, ε → Σ

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $D_f=(0,+\infty)$

$f'(x)=x(2\ln x+1)$, με ρίζα το $\frac{1}{\sqrt{e}}$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	
			min		

β. Είναι $f''(x)=2\ln x+3$, με ρίζα το $\frac{1}{e\sqrt{e}}$

Είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e\sqrt{e}}\right]$, κυρτή στο $\left[\frac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$

γ. Η f είναι συνεχής, έχει ελάχιστο το $\frac{-1}{2e}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$

☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την g στο διάστημα $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

β. Έχουμε

$$I(a)=\int_a^0 g(x)\,dx=\int_a^0 e^x(2x^2-3x)\,dx=$$

$$=\left[e^x(2x^2-3x)\right]_a^0-\int_a^0 e^x(4x-3)\,dx$$

$$=\left[e^x(2x^2-3x)\right]_a^0-\left[e^x(4x-3)\right]_a^0+4\left[e^x\right]_a^0=$$

$$=7ae^a-2a^2e^a-7e^a+7$$

γ. Είναι $\lim\limits_{a\to-\infty} I(a)=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[e^a(-2a^2+7a-7)+7\right]$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-2a^2+7a-7}{e^{-a}}\right)+7$$

Επειδή $\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{-2a^2+7a-7}{e^{-a}}\right) \overset{D-L}{=}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-4a+7}{-e^{-a}}\right)=\lim_{a\to-\infty}\frac{-4}{e^{-a}}=0,$$

Το ζητούμενο όριο ισούται με 7.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f είναι συνεχής, άρα η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = |z|\, f(x^3) \cdot 3x^2 - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$$

β. Ισχύει $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$g(x) \geq g(1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο, στο οποίο η g είναι παραγωγίσιμη.

Άρα από Θ. Fermat είναι

$$g'(1) = 0 \iff |z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$$

γ. Έχουμε $|z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \iff$

$\bar{z}^2 + z^2 = -1 \iff (\alpha - \beta i)^2 + (\alpha + \beta i)^2 = -1$

$\iff \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \iff Re(z^2) = -\frac{1}{2}$

δ. Είναι $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$, με $\alpha - \beta > 0$

Άρα $\alpha + \beta < 0$ και επειδή $\alpha > 0$, θα έχουμε $\beta < 0$.

Επομένως $f(2) f(3) = \alpha \cdot \beta < 0$, συνεπώς από το Θ. Bolzano για την f στο $[2, 3]$ έπεται το ζητούμενο.

2005

ΘΕΜΑ 1ο

A_1: Θεωρία

A_2: Θεωρία

B: α → Λ, β → Λ, γ → Σ, δ → Σ

ε → Λ, στ → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow$

$\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$ (είναι $z_1 \neq 0$)

β. Αν $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$, τότε $\bar{w} = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$

γ. Έχουμε

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \left| \frac{9}{\bar{z}_1} + \frac{9}{\bar{z}_2} + \frac{9}{\bar{z}_3} \right| =$$

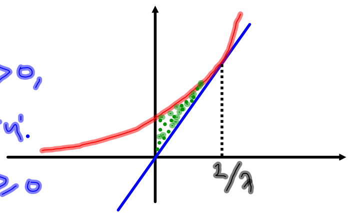
$$= \left| \overline{\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}} \right| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| =$$

$$= 9 \cdot \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1||z_2||z_3|} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Αν $M(x_0, f(x_0)) = M(x_0, e^{\lambda x_0})$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $-e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$, οπότε η εφαπτομένη γίνεται $y = \lambda e x$ και το σημείο επαφής $M(\frac{1}{\lambda}, e)$



γ. Είναι $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$, άρα η f είναι κυρτή.

Συνεπώς $f(x) - \lambda e x \geq 0$

Άρα $E(\lambda) = \int_0^{1/\lambda} (f(x) - \lambda e x) dx =$

$$= \int_0^{1/\lambda} (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda x}]_0^{1/\lambda} -$$

$$= \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda x}]_0^{1/\lambda} - \frac{\lambda e}{2} [x^2]_0^{1/\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda}$$

δ. Είναι $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e - 2}{\frac{4}{\lambda} + 2\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}$

Επειδή $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$ και $\frac{4}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$, το ζητούμενο όριο ισούται με $+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $2f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$2e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^x \Leftrightarrow (2e^{f(x)})'=(e^x)' \Leftrightarrow$

$2e^{f(x)}=e^x+c$, με $f(0)=0 \rightarrow c=1$

Άρα $e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}>0$, συνεπώς

$f(x)=\ln\dfrac{e^x+1}{2}$

β.

Έχουμε

$\int_0^x f(x-t)\,dt=$

$=-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$

Θέτουμε
$x-t=u$, άρα
$dt=-du$
για $t=0: u=x$
$t=x: u=0$

Η f είναι συνεχής, άρα η

$F(x)=\int_0^x f(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη,

συνεπώς συνεχής.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(u)\,du=F(0)=0$

Επομένως το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu x}\overset{D-L}{=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=f(0)=0$

γ. Έχουμε $h'(x)=x^{2005}f(x)+(-x)^{2005}f(-x)$

$=x^{2005}\left(f(x)-f(-x)\right)=x^{2005}\cdot x=x^{2006}$

Επίσης $g'(x)=x^{2006}$

Συνεπώς $h(x)=g(x)+c$, με $c=0$

δ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$h(x)-\dfrac{1}{2008}=0 \Leftrightarrow g(x)-\dfrac{1}{2008}=0$

Αν θέσουμε $\varphi(x)=g(x)-\dfrac{1}{2008}$, τότε

$\varphi'(x)=x^{2006}>0$, για $x>0$, άρα η

φ είναι γν. αύξουσα και

$\varphi(0)\cdot\varphi(1)=-\dfrac{1}{2008}\left(\dfrac{1}{2007}-\dfrac{1}{2008}\right)<0$

Συνεπώς η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

☺

☆2006☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

A_1: Θεωρία

A_2: Θεωρία

B: $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2(x-2) > 0$, για κάθε $x > 2$ και η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, άρα γνησίως αύξουσα σ' αυτό.
Συνεπώς είναι 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1, υπάρχει η f^{-1}.
Είναι $f([2,+\infty)) = [f(2), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [2, +\infty)$, άρα $D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

Επίσης είναι

$y = 2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} + 2$

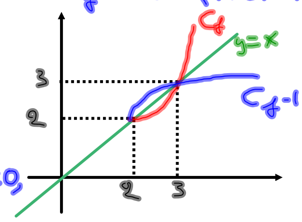
Άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2$

γ.i. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \text{ ή } x = 3 \\ y = x \end{array}\right\}$$

Άρα τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$ είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$

Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$, η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα ίδια σημεία.



ii. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στα A και B.

Είναι $x - f(x) = (x-2)(3-x) \geq 0$, για κάθε $x \in [2, 3]$

Άρα, λόγω συμμετρίας, είναι

$$E(\Omega) = 2\int_2^3 (y - f(x))\,dx = 2\int_2^3 (x-2)(3-x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

☆ΘΕΜΑ 3ο

α.i. Από υπόθεση έχουμε $z_3 = -z_1 - z_2$

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |-2z_1 - z_2| \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Leftrightarrow (-2z_1 - z_2)(-2\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$\ldots \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, ισχύει

Ομοίως και οι άλλες δύο ισότητες.

ii. • Είναι $|z_1-z_2|\le |z_1|+|z_2|=1+1=2$

• και $|z_1-z_2|^2\le 4 \Leftrightarrow \cdots z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2 \geq -2 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\geq -2 \Leftrightarrow 2Re(z_1\bar{z}_2)\geq -2 \Leftrightarrow$

$Re(z_1\bar{z}_2)\geq -1$

β. Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, οι εικόνες τους βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο και αντιστρόφως.

Επειδή $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$, οι εικόνες τους σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, εγγεγραμμένο σ' αυτόν τον κύκλο.

☆ ΘΕΜΑ 4ο

α. Οι περιορισμοί $x\neq 1$ και $x>0$ δίνουν $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Είναι $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}<0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

Επειδή η f είναι και συνεχής, είναι

$f((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

β. Είναι και $f((1,+\infty))=(-\infty,+\infty)$, άρα η $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, μία σε κάθε διάστημα, και επειδή είναι γνησίως μονότονη, είναι μοναδικές.

γ. Η εφαπτομένη της C_g στο A, είναι:

$(\varepsilon_1): y=\frac{1}{a}x+(\ln a-1)$

και της C_h στο B:

$(\varepsilon_2): y=e^{\beta}x+(e^{\beta}-\beta e^{\beta})$

Επειδή ταυτίζονται είναι $\begin{cases}\frac{1}{a}=e^{\beta}\\ \ln a-1=e^{\beta}-\beta e^{\beta}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\ln a\\ \ln a-1=\frac{1}{a}-\frac{\beta}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\ln a\\ a\ln a-a=1-\beta\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\ln a\\ a\ln a-a=1+\ln a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\ln a\\ \frac{a+1}{a-1}-\ln a=0\end{cases}$

Άρα το a είναι ρίζα της $f(x)=0$

δ. Αποδείξαμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Σε κάθε ρίζα αντιστοιχεί μια κοινή εφαπτομένη (από το γ.).

Άρα έχουν δύο κοινές εφαπτόμενες. ☺

☆2007☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 , Α.2 , Α.3 : Θεωρία

Β. $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Lambda$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Sigma$

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $|z| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = 1$, άρα η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β. Είναι $z_1 = -i$ και $z_2 = 1$

i. Η απόσταση των εικόνων τους είναι $|z_1 - z_2| = |-i-1| = \sqrt{2}$

ii. Είναι $(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = (i^2)^{\nu} = (-1)^{\nu} = z_2^{\nu}$

☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	σ.Κ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, τοπικό ελάχιστο το $B(1, -2-2\eta\mu^2\theta)$ και σημείο καμπής το $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

β. Τα επί μέρους σύνολα τιμών της f είναι:

$f(-\infty,-1] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

$f[-1,1] = [-2-2\eta\mu^2\theta, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

$f[1,+\infty) = [-2-2\eta\mu^2\theta, +\infty)$

Σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα ανήκει το 0, άρα η f έχει τρεις ρίζες, οι οποίες είναι μοναδικές, λόγω της μονοτονίας της σε κάθε διάστημα.

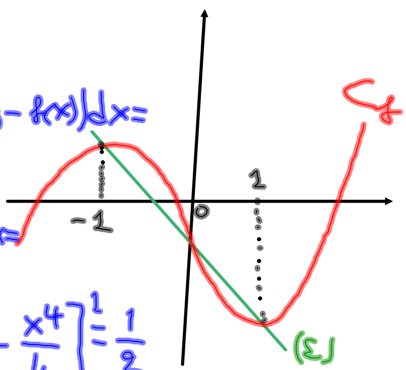
γ. Απλή επαλήθευση.

δ. Είναι

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{0} (f(x)-y)\,dx + \int_{0}^{1} (y-f(x))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3+x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$



ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού οι f, g είναι συνεχείς, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, με $F'(x) = f(x)\cdot g(x)$

Επειδή $f \nearrow$ στο $[0,1]$, για $x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) > 0$.

Άρα $f(x)>0$, για κάθε $x \in [0,1]$

Επομένως $F'(x)>0$, για κάθε $x\in[0,1]$

Συνεπώς η F είναι $\nearrow$ στο $[0,1]$, άρα για $x>0 \Rightarrow F(x)>F(0)=0$

β. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)\,G(x) > F(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x g(t)\big(f(x)-f(t)\big)dt > 0,\ t\in[0,x]$$

Η τελευταία σχέση όμως ισχύει γιατί $g(t)>0$ και $f \nearrow$, άρα $g(x)>g(t)$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, με

$$H'(x) = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)}$$

$$= \frac{g(x)\big(f(x)G(x) - F(x)\big)}{G^2(x)} > 0, \text{ για κάθε } x\in(0,1]$$

Άρα η H είναι γν. φθίνουσα, συνεπώς για $x \le 1 \Rightarrow H(x) \le H(1)$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} = \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{G(x)} =$$

Το όριο είναι $\frac{0}{0}$ και ισχύουν οι υποθέσεις του D-L

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(1)$$

και $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5} = \lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4\,(x^2)'}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\frac{2x}{5} = 1\cdot 0 = 0$$

Επομένως το ζητούμενο όριο ισούται με μηδέν.

☆ΘΕΜΑ 1ο

A_1, A_2 : θεωρία

Β. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

☆ΘΕΜΑ 2ο

α. $|(i+2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |i+2\sqrt{2}||z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γ. τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και $\rho = 2$

β. Είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB, όπου $A(1,-1)$ και $B(3,-3)$

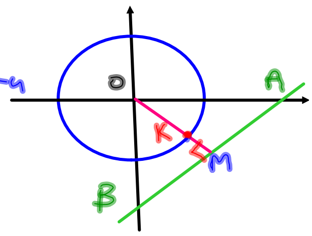
γ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου αυτής είναι $(\varepsilon): y = x-4$

Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του O από την (ε).

Δηλαδή $|w|_{min} = \dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

δ. Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση

$(KM) = (OM) - \rho = 2\sqrt{2} - 2$



☆ΘΕΜΑ 3ο

α. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Είναι $f(0) = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

β. Για $x>0$, $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	
	0		$-\frac{1}{e}$		$+\infty$

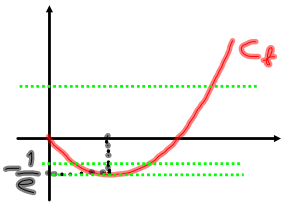
Λόγω συνέχειας της f και στο 0, είναι γν. φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Είναι συνεχής, έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{e}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow f(x) = a$

Άρα:



- Αν $a < -\frac{1}{e}$, η εξίσωση δεν έχει ρίζα.
- Αν $-\frac{1}{e} < a < 0$, έχει έχει δύο θετικές ρίζες
- Αν $a = -\frac{1}{e}$ ή $a \geq 0$ έχει μία θετική ρίζα.

δ. Με Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1]$, η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$f'(x+1) > f'(\xi)$, όπου $\xi \in (x, x+1)$

Επειδή $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, η f' είναι γν. αύξουσα, άρα για $\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω $\int_0^2 f(t)\,dt = c$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση που μας δίνεται προκύπτει $c = 8$, οπότε

$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β. Είναι $g''(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{g'(x+t) - g'(x)}{t} \underset{=}{t=-h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{g'(x-h) - g'(x)}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$

γ. i. Έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{=}{\left(\frac{0}{0}\right)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right] =$

$= \frac{1}{2} \left(g''(x) + g''(x) \right) = g''(x)$

Άρα $g''(x) = f(x) + 45 = 20x^3 + 6x$

Επομένως $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$, με $g'(0) = c = 1$

Άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$, από όπου έχουμε

$g(x) = x^5 + x^3 + x + c$, με $c = 1$

Συνεπώς $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. Είναι $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

☆2009☆

☆ΘΕΜΑ 1ο

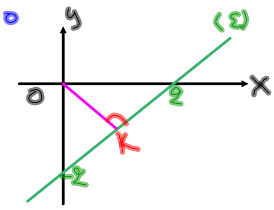
Α. Β. Θεωρία

Γ. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Lambda$

☆ΘΕΜΑ 2ο

Α. α. Έστω $z = x + yi$, τότε $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases}$

Με απαλοιφή του λ προκύπτει η εξίσωση της ευθείας (ε): $x - y - 2 = 0$



β. Από τους μιγαδικούς που έχουν εικόνα στην (ε), εκείνος που έχει το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το Κ.

Οι συντεταγμένες του Κ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{Bmatrix} x - y - 2 = 0 \\ y = -x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (1, -1)$$

Άρα $z_0 = 1 - i$

Β. Έστω $w = x + yi$. Τότε

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x,y) = (3,1) \\ \text{ή} \\ (x,y) = (-4,1) \end{Bmatrix}$$

☆ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x > -1$, άρα
$f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x > -1$.

Συνεπώς από το Θ. Fermat προκύπτει ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$.

Επομένως $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

Β. α. Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = e^x - \ln(x+1)$,
με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$

β. Ισχύει $f'(0) = 0$ και f' γν. αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

Άρα για $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$
και για $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

Επειδή η f είναι και συνεχής, έχουμε το συμπέρασμα.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$h(x) = (x-2)(f(\beta) - 1) + (x-1)(f(\gamma) - 1)$, η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και

$h(1) = 1 - f(\beta)$

$h(2) = f(\gamma) - 1$

Άρα $h(1)h(2) \le 0$

- Αν $h(1)=0 \Leftrightarrow f(\beta)=1 \Leftrightarrow f(\beta)=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \beta=0$, άτοπο
- Αν $h(2)=0 \Leftrightarrow f(\gamma)=1 \Leftrightarrow \gamma=0$, άτοπο

Άρα $h(1)\cdot h(2)<0$. Στη συνέχεια Θ. Bolzano.

☆ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή η f είναι συνεχής, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)dt$ και $\int_0^x t f(t)dt$, είναι παραγωγίσιμες άρα συνεχείς.

Επομένως και η G είναι συνεχής στο $(0,2]$

Επίσης είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x t f(t)dt}{x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x f(x))=0$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+}G(x)=0$ και

Η $\varphi(t)=t f(t)$ είναι συνεχής, άρα η H είναι παρ/μη, συνεπώς συνεχής. Άρα $\lim_{x\to 0^+}H(x)=H(0)=0$

$$G(0)=6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=3$$

Επομένως η G είναι συνεχής και στο 0.

β. Εξηγήσαμε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων.

Είναι $G'(x)=\dfrac{x\cdot H'(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$

γ. Αποδείξαμε ότι $G(0)=3$

Επίσης είναι $G(2)=\dfrac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=$

$$=\frac{\int_0^2 t f(t)dt}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(t f(t)+2f(t)\right)dt+3=0+3=3$$

Άρα από Θ. Rolle, υπάρχει $a\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $G'(a)=0 \Leftrightarrow \dfrac{H(a)}{a^2}=0 \Leftrightarrow H(a)=0$

δ. Από Θ.Μ.Τ. για την G στο $[0,a]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,a)$ τέτοιο, ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\frac{H(a)}{a}-\int_0^a f(t)dt+3-3}{a}\Leftrightarrow$$

$$a\,H(\xi)=\xi^2\int_0^a f(t)dt\Leftrightarrow$$

$$a\int_0^{\xi} t f(t)dt=\xi^2\int_0^a f(t)dt$$

☺

ΘΕΜΑ Α

A_1, A_2, A_3: Θεωρία

A_4: $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B_1. $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$z \in \{1+i,\ 1-i\}$

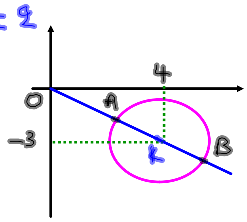
B_2. Είναι $z_1^{2010} = \left[(1+i)^2\right]^{1005} = (2i)^{2005} = 2^{2005} \cdot i$

και $z_2^{2010} = \left[(1-i)^2\right]^{1005} = (-2i)^{2005} = -2^{2005} \cdot i$

B_3. Έχουμε ισοδύναμα:

$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - (4-3i)| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(4,-3)$ και $\rho = 2$



B_4. Ισχύει

$(OA) \le |w| \le (OB) \Leftrightarrow$

$|(OK) - \rho| \le |w| \le |(OK) + \rho| \Leftrightarrow$

$|5-2| \le |w| \le |5+2| \Leftrightarrow$

$3 \le |w| \le 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Είναι $f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ_2. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left((3x-2)^2 + 1\right) - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$

$2x^2 + \ln\left((x^2)^2 + 1\right) = 2(3x-2) + \ln\left((3x-2)^2+1\right) \Leftrightarrow$

$f(x^2) = f(3x-2) \xLeftrightarrow[1-1]{f} x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

Γ_3. Είναι $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, με ρίζες ± 1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							
			σ.κ		σ.κ		

Από τον πίνακα φαίνεται ότι παρουσιάζει σημεία καμπής τα $A(-1, f(-1)) = A(-1, \ln 2 - 2)$

και $B(1, f(1)) = B(1, \ln 2 + 2)$

Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία καμπής είναι αντίστοιχα:

(ε_1): $y = x + \ln 2 - 1$ και

(ε_2): $y = 3x + \ln 2 - 1$

Για $x = 0$ προκύπτει και από τις δύο εξισώσεις $y = \ln 2 - 1$, άρα αυτές τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

Γ4. Έχουμε

$$I=\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)\,dx=$$

$$=2\int_{-1}^{1}x^2dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)\,dx=$$

$$=2\int_{-1}^{1}x^2dx+\frac{1}{2}\int_{2}^{2}\ln u\,du=\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1}+0=\frac{4}{3}$$

☆ ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή η συνάρτηση $g(t)=\dfrac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο

$$f'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}\quad, x\in\mathbb{R}\quad (1)$$

Δ2. Είναι $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2xf'(x)-2f(x)$

$$\overset{(1)}{=\!=}2f(x)-2f(x)=0$$

Άρα $g(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$

Δ3. Έχουμε $g(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ προκύπτει $g(0)=c$

Όμως είναι $g(0)=f^2(0)=9$. Άρα $c=9$

Επομένως $g(x)=9\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=9\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2=x^2+9.$

Όμως είναι $f(x)-x\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $\varphi(x)=f(x)-x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη έχουμε $\varphi(0)=3>0$ και φ συνεχής άρα $\varphi(x)=f(x)-x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+1}f(t)\,dt$,

η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\left(\int_{x}^{0}f(t)\,dt\right)'+\left(\int_{0}^{x+1}f(t)\,dt\right)'=$$

$$=-f(x)+f(x+1)$$

Όμως $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x\right)$$

Συνεπώς η f είναι γν. αύξουσα, άρα για $x<x+1\Rightarrow f(x)<f(x+1)$

Άρα η h είναι γν. αύξουσα, συνεπώς για $x<x+1\Rightarrow h(x)<h(x+1)$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο

☆2011☆

☆ΘΕΜΑ Α

A_1, A_2 : Θεωρία

A_3 : $a \to Σ$, $β \to Σ$, $γ \to Λ$, $δ \to Λ$, $ε \to Σ$

☆ΘΕΜΑ Β

B_1. Η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι ο κύκλος $K(0,3)$ και $ρ=1$

B_2. Ισχύει $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow$

$$\bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

B_3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}$

$=2x$, αν θέσουμε $z=x+yi$

και

$-2 \le w \le 2 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$,

το οποίο ισχύει, από το γεωμ. τόπο του z

$\left(x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow 1-x^2=(y-3)^2 \ge 0\right)$

B_4. Έχουμε $|z-w|=|z-(z+\bar{z})|=|-\bar{z}|=|z|$

☆ΘΕΜΑ Γ

$Γ_1$. Η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+x f''(x) \Leftrightarrow$

$\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(x f'(x)\right)' \Leftrightarrow$

$e^x f'(x)-e^x=x f'(x)+c \Leftrightarrow$ | $f'(0)=0$, άρα $c=-e^0=-1$

$e^x f'(x)-e^x=x f'(x)-1 \Leftrightarrow$

$e^x f'(x)-x f'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow$

$(e^x-x) f'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow$ | ισχύει $e^x \ge x+1 > x$

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln(e^x-x)\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=\ln(e^x-x)+c \Leftrightarrow$ | Είναι $f(0)=0$ άρα $c=0$

$f(x)=\ln(e^x-x)$

$Γ_2$. Είναι

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, με ρίζα το 0.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και

γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Παρουσιάζει ελάχιστο το $(0,0)$.

Γ_3. Είναι $f''(x)=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$

οι ρίζες της f'', εξαρτώνται από τις ρίζες της h. Μελετάμε λοιπόν την h.

Είναι $h'(x)=-e^x(x-1)$, με ρίζα το 1

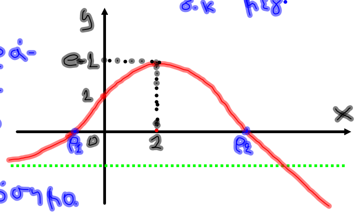
και $h''(x)=-xe^x$, με ρίζα το 0.

Έχουμε ακόμα ότι

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$h''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$	-1		1		$e-1$		$-\infty$
			σ.κ		μεγ.		

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$



Από τη γραφική παράσταση της h, βλέπουμε ότι έχει δύο ρίζες ακριβώς, στις οποίες αλλάζει πρόσημο.

Άρα η f (η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα η C_f δέχεται εφαπτομένη) έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ_4. Έστω $\varphi(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και

$\varphi(0)=-1<0$

$\varphi(\frac{\pi}{2})=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$ $\left(\text{αφού } e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}>1\right)$

Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της φ στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

Επιπλέον είναι $\varphi'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x>0$ σε αυτό το διάστημα, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

☆ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Θέτουμε στις αρχικές σχέσεις

$x+t=u \Leftrightarrow dt=du$ και για $t=0: u=x$

$t=-x: u=0$

Έτσι οι σχέσεις γίνονται:

$f(x)=1+\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ και

$g(x)=1+\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$

Επειδή οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα είναι συνεχείς, οι f και g είναι παραγωγίσιμες.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ και $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$

Επομένως $f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(\ln(g(x)))' \Leftrightarrow$

$\ln f(x)=\ln g(x)+c$

Είναι $f(0)=g(0)=1$, οπότε για $x=0$ προκύπτει $c=0$.

Άρα $\ln(f(x)) = \ln(g(x)) \Leftrightarrow f(x)=g(x), x\in\mathbb{R}$

Δ2.

Ισχύει $f(x)\cdot f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$

$f^2(x) = e^{2x}+c$

Για $x=0$, προκύπτει $c=0$, άρα $f^2(x) = (e^x)^2$ και επειδή $f(x)>0$, έχουμε $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ3.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$

θέτουμε $t=\frac{1}{x}$, οπότε $t\to -\infty$

$= \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{\frac{1}{t}}{e^t} = \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{e^{-t}}{t} \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) \overset{DLH}{=}$

$= \lim\limits_{t\to -\infty}\left(-e^{-t}\right) = -\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{1}{e^t} = -\infty$

Δ4.

Η F είναι παραγωγίσιμη με

$F'(x) = f(x^2) = e^{x^2} > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η F είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το εμβαδόν που περιγράφεται είναι

το $E(\Omega) = \int_0^1 |F(x)|\,dx$

Για $0\le x\le 1 \Rightarrow F(0)\le F(x) \le F(1)=0$

Άρα $E(\Omega) = -\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1 x' F(x)\,dx =$

$= -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 x F'(x)\,dx = 0 + \int_0^1 x e^{x^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.